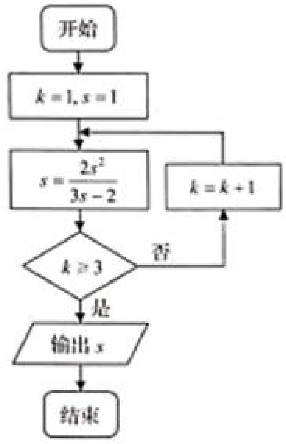
北京 2019 年高考数学真题

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分



01．已知复数 z=2+i，则 $z\cdot\overline{z}=$ 【　　】

A． $\sqrt{3}$　　B． $\sqrt{5}$
C．3　　D．5

02．执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为 【　　】

A．1　　B．2
C．3　　D．4

03．已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+3t, \\ y=2+4t \end{cases}$ （t 为参数），则点（1,0）到直线 l 的距离是 【　　】

A． $\frac{1}{5}$　　B． $\frac{2}{5}$　　C． $\frac{4}{5}$　　D． $\frac{6}{5}$

04．已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ （a＞b＞0）的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，则 【　　】

A． $a^2=2b^2$　　B． $3a^2=4b^2$　　C．a=2b　　D．3a=4b

05．若 x，y 满足 $|x|\leq 1-y$ ，且 y≥−1，则 3x+y 的最大值为 【　　】

A．-7　　B．1　　C．5　　D．7

06．在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述.两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\frac{5}{2}\lg\frac{E_1}{E_2}$ ，其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k（k=1,2）.已知太阳的星等是﹣26.7，天狼星的星等是﹣1.45，则太阳与天狼星的亮度的比值为 【　　】

A． $10^{10.1}$　　B．10.1　　C．lg10.1　　D． $10^{-10.1}$

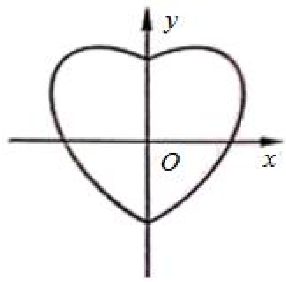
07．设点 A，B，C 不共线，则“ $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为锐角”是“ $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$ ”的 【　　】

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件
C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

08．数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线 C： $x^2+y^2=1+|x|y$ 就是其中之一（如图）.给出下列三个结论：

① 曲线 C 恰好经过 6 个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；
② 曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$ ；
③ 曲线 C 所围成的“心形”区域的面积小于 3.

其中，所有正确结论的序号是 【　　】



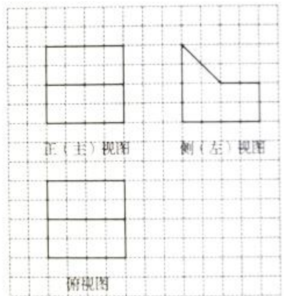
A．①　　B．②
C．①②　　D．①②③

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分

09．函数 $f(x)=\sin^2 2x$ 的最小正周期是__________.

10．设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=-3$，$S_5=-10$，则 $a_5=$__________，S_n的最小值为__________.

11．某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得，其三视图如图所示．如果网格纸上小正方形的边长为 1，那么该几何体的体积为__________.



12．已知 l，m 是平面α外的两条不同直线．给出下列三个论断：
① $l\perp m$；② $m\parallel\alpha$；③ $l\perp\alpha$．
以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：__________.

13．设函数 $f(x)=e^x+ae^{-x}$（a 为常数）．若 f（x）为奇函数，则 a=________；若 f（x）是 R 上的增函数，则 a 的取值范围是___________.

14．李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒．为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到 120 元，顾客就少付 x 元．每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的 80%．
① 当 x=10 时，顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒，需要支付__________元；
② 在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 x 的最大值为___

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分

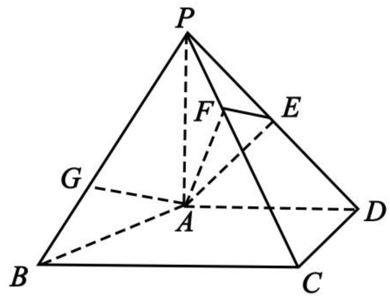
15．在△ABC 中，a=3，b−c=2，$\cos B=-\dfrac{1}{2}$．
（Ⅰ）求 b，c 的值；
（Ⅱ）求 sin（B－C）的值.

16．如图，在四棱锥 P－ABCD 中，PA⊥平面 ABCD，AD⊥CD，AD∥BC，PA=AD=CD=2，BC=3．E 为 PD 的中点，点 F 在 PC 上，且 $\frac{PF}{PC}=\frac{1}{3}$．

（Ⅰ）求证：CD⊥平面 PAD；

（Ⅱ）求二面角 F－AE－P 的余弦值；

（Ⅲ）设点 G 在 PB 上，且 $\frac{PG}{PB}=\frac{2}{3}$．判断直线 AG 是否在平面 AEF 内，说明理由．



17．改革开放以来，人们的支付方式发生了巨大转变．近年来，移动支付已成为主要支付方式之一．为了解某校学生上个月 A，B 两种移动支付方式的使用情况，从全校学生中随机抽取了 100 人，发现样本中 A，B 两种支付方式都不使用的有 5 人，样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下：

交付金额（元） 支付方式	（0，1000］	（1000，2000］	大于 2000
仅使用 A	18 人	9 人	3 人
仅使用 B	10 人	14 人	1 人

（Ⅰ）从全校学生中随机抽取 1 人，估计该学生上个月 A，B 两种支付方式都使用的概率；

（Ⅱ）从样本仅使用 A 和仅使用 B 的学生中各随机抽取 1 人，以 X 表示这 2 人中上个月支付金额大于 1000 元的人数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化．现从样本仅使用 A 的学生中，随机抽查 3 人，发现他们本月的支付金额都大于 2000 元．根据抽查结果，能否认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化？说明理由．

18．已知抛物线 C：$x^2=-2py$ 经过点（2，-1）．

（Ⅰ）求抛物线 C 的方程及其准线方程；

（Ⅱ）设 O 为原点，过抛物线 C 的焦点作斜率不为 0 的直线 l 交抛物线 C 于两点 M，N，直线 y=-1 分别交直线 OM，ON 于点 A 和点 B．求证：以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点．

19．已知函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程；

（Ⅱ）当 $x\in[-2,4]$ 时，求证：$x-6\le f(x)\le x$；

（Ⅲ）设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|\,(a\in\mathbf{R})$，记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 M（a），当 M（a）最小时，求 a 的值．

20．已知数列$\{a_n\}$，从中选取第 i_1 项、第 i_2 项、…、第 i_m 项($i_1<i_2<\cdots<i_m$)，若 $a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_m}$，则称新数列 a_{i_1}，a_{i_2},…，a_{i_m} 为$\{a_n\}$的长度为 m 的递增子列．规定：数列$\{a_n\}$的任意一项都是$\{a_n\}$的长度为 1 的递增子列．

（Ⅰ）写出数列 1，8，3，7，5，6，9的一个长度为 4 的递增子列；

（Ⅱ）已知数列$\{a_n\}$的长度为 p 的递增子列的末项的最小值为 a_{m_0}，长度为 q 的递增子列的末项的最小值为 a_{n_0}．若 p<q，求证：$a_{m_0}<a_{n_0}$；

（Ⅲ）设无穷数列$\{a_n\}$的各项均为正整数，且任意两项均不相等．若$\{a_n\}$的长度为 s 的递增子列末项的最小值为 2s－1，且长度为 s 末项为 2s－1 的递增子列恰有 2^{s-1} 个（s=1，2，…），求数列$\{a_n\}$的通项公式．

北京 2019 年高考数学真题答案

一、选择题　01-05 DBDBC　　06-08 ACC

二、填空题

09．$\dfrac{\pi}{2}$　；　10．0；-10；11．40；12．如果 $l\perp\alpha$，$m\parallel\alpha$，则 $l\perp m$；　13．-1；$(-\infty,0]$；14．130；15

三、解答题

15．（1）由题意可得：$\begin{cases}\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{1}{2}\\ b-c=2\\ a=3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=3\\ b=7\\ c=5\end{cases}$.

（2）由同角三角函数基本关系可得：$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，结合正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 可得：

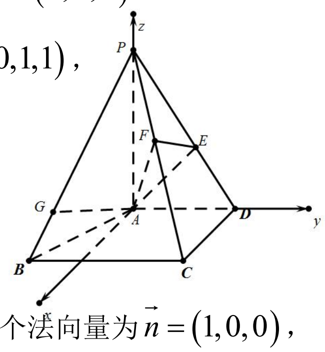
$\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，很明显角 C 为锐角，故 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{11}{14}$，

故 $\sin(B-C)=\sin B\cos C-\cos B\sin C=\dfrac{4}{7}\sqrt{3}$

16．（1）由于 PA⊥平面 ABCD，CD⊂平面 ABCD，则 PA⊥CD，由题意可知 AD⊥CD，且 PA∩AD=A，由线面垂直的判定定理可得 CD⊥平面 PAD.

（2）以点 A 为坐标原点，平面 ABCD 内与 AD 垂直的直线为 x 轴，AD,AP 方向为 y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，易知：$A(0,0,0),P(0,0,2),C(2,2,0),D(0,2,0)$，

由 $\overrightarrow{PF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PC}$ 可得点 F 的坐标为 $F\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$，由 $\overrightarrow{PE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PD}$ 可得 $E(0,1,1)$，



设平面 AEF 的法向量为：$\vec{m}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AF}=(x,y,z)\cdot\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}y+\dfrac{4}{3}z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=(x,y,z)\cdot(0,1,1)=y+z=0\end{cases}$，

据此可得平面 AEF 的一个法向量为：$\vec{m}=(1,1,-1)$，很明显平面 AEP 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,0,0)$，

$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\times|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\times 1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 二面角 F-AE-P 的平面角为锐角，故二面角 F-AE-P 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（3）易知 $P(0,0,2),B(2,-1,0)$，由 $\overrightarrow{PG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PB}$ 可得 $G\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，则 $\overrightarrow{AG}=\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，

注意到平面 AEF 的一个法向量为：$\vec{m}=(1,1,-1)$，其 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{AG}=0$ 且点 A 在平面 AEF 内，故直线 AG 在平面 AEF 内.

17．（1）由题意可知，两种支付方式都是用的人数为：$100-30-25-5=40$ 人，则：

该学生上个月 A，B 两种支付方式都使用的概率 $p=\dfrac{40}{100}=\dfrac{2}{5}$.

（2）由题意可知，仅使用 A 支付方法的学生中，金额不大于 1000 的人数占$\frac{3}{5}$，

金额大于 1000 的人数占$\frac{2}{5}$，仅使用 B 支付方法的学生中，金额不大于 1000 的人数占$\frac{2}{5}$，

金额大于 1000 的人数占$\frac{3}{5}$，且 X 可能的取值为 0, 1, 2.

$p(X=0)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$，$p(X=1)=\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{13}{25}$，$p(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$，

X 的分布列为：

X	0	1	2
$p(X)$	$\frac{6}{25}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{6}{25}$

其数学期望：$E(X)=0\times\frac{6}{25}+1\times\frac{13}{25}+2\times\frac{6}{25}=1$.

（3）我们不认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化. 理由如下：
随机事件在一次随机实验中是否发生是随机的，是不能预知的，随着试验次数的增多，频率越来越稳定于概率。
学校是一个相对消费稳定的地方，每个学生根据自己的实际情况每个月的消费应该相对固定，出现题中这种现象可能是发生了“小概率事件”.

18. （1）将点$(2,-1)$代入抛物线方程：$2^2=2p\times(-1)$可得：$p=2$，故抛物线方程为：$x^2=-4y$，
其准线方程为：$y=1$.

（2）很明显直线l的斜率存在，焦点坐标为$(0,-1)$，设直线方程为$y=kx-1$，与抛物线方程$x^2=-4y$

联立可得：$x^2+4kx-4=0$. 故：$x_1+x_2=-4k, x_1x_2=-4$. 设$M\left(x_1,-\frac{x_1^2}{4}\right), N\left(x_2,-\frac{x_2^2}{4}\right)$，

则$k_{OM}=-\frac{x_1}{4}, k_{ON}=-\frac{x_2}{4}$，直线$OM$的方程为$y=-\frac{x_1}{4}x$，与$y=-1$联立可得：$A\left(\frac{4}{x_1},-1\right)$，

同理可得$B\left(\frac{4}{x_2},-1\right)$，易知以 AB 为直径的圆的圆心坐标为：$\left(\frac{2}{x_1}+\frac{2}{x_2},-1\right)$，圆的半径为：$\left|\frac{2}{x_1}-\frac{2}{x_2}\right|$，

且：$\frac{2}{x_1}+\frac{2}{x_2}=\frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}=2k$，$\left|\frac{2}{x_1}-\frac{2}{x_2}\right|=2\times\frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{|x_1x_2|}=2\sqrt{k^2+1}$，

则圆的方程为：$(x-2k)^2+(y+1)^2=4(k^2+1)$，令$x=0$整理可得：$y^2+2y-3=0$，解得：

$y_1=-3, y_2=1$，即以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点$(0,-3),(0,1)$.

19. （1）$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x+1$，令$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x+1=1$得$x=0$或者$x=\frac{8}{3}$.

当$x=0$时，$f(0)=0$，此时切线方程为$y=x$，即$x-y=0$；

当$x=\frac{8}{3}$时，$f(\frac{8}{3})=\frac{8}{27}$，此时切线方程为$y=x-\frac{64}{27}$，即$27x-27y-64=0$；

综上可得所求切线方程为$x-y=0$和$27x-27y-64=0$.

（2）设 $g(x)=f(x)-x=\frac{1}{4}x^3-x^2$，$g'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x$，令 $g'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x=0$ 得 $x=0$ 或者 $x=\frac{8}{3}$，

所以当 $x\in[-2,0]$ 时，$g'(x)\ge 0$，$g(x)$ 为增函数；当 $x\in(0,\frac{8}{3})$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数；

当 $x\in[\frac{8}{3},4]$ 时，$g'(x)\ge 0$，$g(x)$ 为增函数；而 $g(0)=g(4)=0$，所以 $g(x)\le 0$，即 $f(x)\le x$；

同理令 $h(x)=f(x)-x+6=\frac{1}{4}x^3-x^2+6$，可求其最小值为 $h(-2)=0$，所以 $h(x)\ge 0$，即 $f(x)\ge x-6$，综上可得 $x-6\le f(x)\le x$.

（3）由（Ⅱ）知 $-6\le f(x)-x\le 0$，所以 $M(a)$ 是 $|a|,|a+6|$ 中的较大者，

若 $|a|\ge|a+6|$，即 $a\leqslant -3$ 时，$M(a)=|a|=-a\ge 3$；

若 $|a|<|a+6|$，即 $a>-3$ 时，$M(a)=|a+6|=a+6>3$；

所以当 $M(a)$ 最小时，$M(a)=3$，此时 $a=-3$.

20.（1）满足题意的一个长度为 4 的递增子列为：1, 3, 5, 6.

（2）对于每一个长度为 q 的递增子列 $a_1,a_2,\cdots a_q$，都能从其中找到若干个长度为 p 的递增子列 $a_1,a_2,\cdots a_p$，此时 $a_p\le a_q$，设所有长度为 q 的子列的末项分别为：$\{a_{q_1},a_{q_2},a_{q_3},\cdots\}$，所有长度为 p 的子列的末项分别为：$\{a_{p_1},a_{p_2},a_{p_3},\cdots\}$，则 $a_{n_0}=\min\{a_{q_1},a_{q_2},a_{q_3},\cdots\}$，注意到长度为 p 的子列可能无法进一步找到长度为 q 的子列，

故 $a_{m_0}\le\min\{a_{p_1},a_{p_2},a_{p_3},\cdots\}$，据此可得：$a_{m_0}<a_{n_0}$.

（3）满足题意的一个数列的通项公式可以是 $a_n=\begin{cases}n-1,n\text{为偶数}\\n+1,n\text{为奇数}\end{cases}=2,1,4,3,6,5,8,7,\cdots$，

下面说明此数列满足题意. 很明显数列为无穷数列，且各项均为正整数，任意两项均不相等.
长度为 s 的递增子列末项的最小值为 2s−1，下面用数学归纳法证明长度为 s 末项为 2s−1 的递增子列恰有 2^{s-1} 个 $(s=1,2,\cdots)$：当 $n=1$ 时命题显然成立，

假设当 $\boldsymbol{n=k}$ 时命题成立，即长度为 k 末项为 2k−1 的递增子列恰有 2^{k-1} 个，

则当 $n=k+1$ 时，对于 $\boldsymbol{n=k}$ 时得到的每一个子列 $a_{s_1},a_{s_2},\cdots,a_{s_{k-1}},2k-1$，

可构造：$a_{s_1},a_{s_2},\cdots,a_{s_{k-1}},2k-1,2(k+1)-1$ 和 $a_{s_1},a_{s_2},\cdots,a_{s_{k-1}},2k,2(k+1)-1$ 两个满足题意的递增子列，则长度为 k+1 末项为 2k+1 的递增子列恰有 $2\times 2^{k-1}=2^k=2^{(k+1)-1}$ 个，

综上可得，数列 $a_n=\begin{cases}n-1,n\text{为偶数}\\n+1,n\text{为奇数}\end{cases}=2,1,4,3,6,5,8,7,\cdots$ 是一个满足题意的数列的通项公式.

注：当 $s=3$ 时，所有满足题意的数列为：$\{2,3,5\},\{1,3,5\},\{2,4,5\},\{1,4,5\}$，

当 $s=4$ 时，数列 $\{2,3,5\}$ 对应的两个递增子列为：$\{2,3,5,7\}$ 和 $\{2,3,6,7\}$.