北京 2020 年高考数学真题

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

01. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x|0<x<3\}$，则 $A\cap B=$ 【　　】

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,1,2\}$　　D. $\{1,2\}$

02. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是（1，2），则 $i\cdot z=$ 【　　】

A. $1+2i$　　B. $-2+i$　　C. $1-2i$　　D. $-2-i$

03. 在 $(\sqrt{x}-2)^5$ 的展开式中，x^2 的系数为 【　　】

A. -5　　B. 5　　C. -10　　D. 10

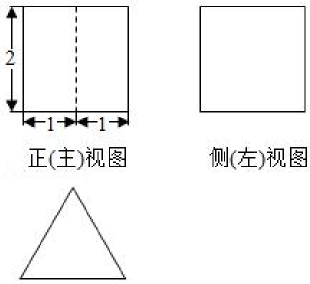
04. 某三棱柱的底面为正三角形，其三视图如图所示，该三棱柱的表面积为 【　　】

A. $6+\sqrt{3}$

B. $6+2\sqrt{3}$

C. $12+\sqrt{3}$

D. $12+2\sqrt{3}$



俯视图

05. 已知半径为 1 的圆经过点（3，4），则其圆心到原点的距离的最小值为 【　　】

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

06. 已知函数 $f(x)=2^x-x-1$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集是 【　　】

A. $(-1,1)$

B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(0,1)$

D. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

07. 设抛物线的顶点为 O，焦点为 F，准线为 l．P 是抛物线上异于 O 的一点，过 P 作 $PQ\perp l$ 于 Q，则线段 FQ 的垂直平分线 【　　】

A. 经过点 O

B. 经过点 P

C. 平行于直线 OP

D. 垂直于直线 OP

08. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=-9$，$a_5=-1$．记 $T_n=a_1a_2\cdots a_n$（$n=1,2,\cdots$），则数列 $\{T_n\}$ 【　　】

A. 有最大项，有最小项

B. 有最大项，无最小项

C. 无最大项，有最小项

D. 无最大项，无最小项

09. 已知 $\alpha,\beta\in R$，则“存在 $k\in Z$ 使得 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$”是“$\sin\alpha=\sin\beta$”的 【　　】

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

10．2020 年 3 月 14 日是全球首个国际圆周率日（πDay）．历史上，求圆周率π的方法有多种，与中国传统数学中的“割圆术”相似，数学家阿尔•卡西的方法是：当正整数 n 充分大时，计算单位圆的内接正 6n 边形的周长和外切正 6n 边形（各边均与圆相切的正 6n 边形）的周长，将它们的算术平均数作为 2π的近似值．按照阿尔•卡西的方法，π的近似值的表达式是　　　　【　　】

A．$3n\left(\sin\frac{30^\circ}{n}+\tan\frac{30^\circ}{n}\right)$　　　　B．$6n\left(\sin\frac{30^\circ}{n}+\tan\frac{30^\circ}{n}\right)$

C．$3n\left(\sin\frac{60^\circ}{n}+\tan\frac{60^\circ}{n}\right)$　　　　D．$6n\left(\sin\frac{60^\circ}{n}+\tan\frac{60^\circ}{n}\right)$

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

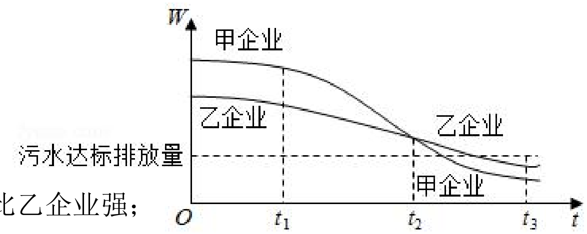
11．函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln x$ 的定义域是_________．

12．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$，则 C 的右焦点的坐标为_________；C 的焦点到其渐近线的距离是________．

13．已知正方形 ABCD 的边长为 2，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，则 $|\overrightarrow{PD}|=$_____；$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=$_____．

14．若函数 $f(x)=\sin(x+\phi)+\cos x$ 的最大值为 2，则常数 φ 的一个取值为_________．

15．为满足人民对美好生活的向往，环保部门要求相关企业加强污水治理，排放未达标的企业要限期整改．设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W=f(t)$，用 $-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小评价在 $[a,b]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱．已知整改期内，甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如图所示．



给出下列四个结论：

① 在 $[t_1,t_2]$ 这段时间内，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

② 在 t_2 时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

③ 在 t_3 时刻，甲，乙两企业的污水排放都已达标；

④ 甲企业在 $[0,t_1]$，$[t_1,t_2]$，$[t_2,t_3]$ 这三段时间中，在 $[0,t_1]$ 的污水治理能力最强．

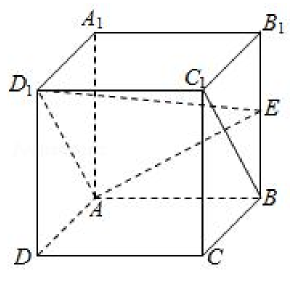
其中所有正确结论的序号是_________．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．（13 分）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 BB_1 的中点．

（Ⅰ）求证：BC_1∥平面 AD_1E；

（Ⅱ）求直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值．



17.（13 分）在△ABC 中，a+b＝11，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求：

（Ⅰ）a 的值；

（Ⅱ）sinC 和△ABC 的面积.

条件①：c＝7，cosA＝$-\frac{1}{7}$；

条件②：cosA＝$\frac{1}{8}$，cosB＝$\frac{9}{16}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

18.（14 分）某校为举办甲、乙两项不同活动，分别设计了相应的活动方案；方案一、方案二．为了解该校学生对活动方案是否支持，对学生进行简单随机抽样，获得数据如表：

	男生		女生	
	支持	不支持	支持	不支持
方案一	200 人	400 人	300 人	100 人
方案二	350 人	250 人	150 人	250 人

假设所有学生对活动方案是否支持相互独立.

（Ⅰ）分别估计该校男生支持方案一的概率、该校女生支持方案一的概率；

（Ⅱ）从该校全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 1 人，估计这 3 人中恰有 2 人支持方案一的概率；

（Ⅲ）将该校学生支持方案二的概率估计值记为 p_0．假设该校一年级有 500 名男生和 300 名女生，除一年级外其他年级学生支持方案二的概率估计值记为 p_1．试比较 p_0 与 p_1 的大小．（结论不要求证明）

19.（15 分）已知函数 $f(x)=12-x^2$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 的斜率等于 -2 的切线方程；

（Ⅱ）设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t, f(t))$ 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为 $S(t)$，求 $S(t)$ 的最小值.

20.（15 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(-2,-1)$，且 $a=2b$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过点 $B(-4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M，N，直线 MA，NA 分别交直线 $x=-4$ 于点 P，Q. 求 $\frac{|PB|}{|BQ|}$ 的值.

21.（15 分）已知$\{a_n\}$是无穷数列．给出两个性质：

① 对于$\{a_n\}$中任意两项a_i，a_j（$i>j$），在$\{a_n\}$中都存在一项a_m，使得$\frac{{a_i}^2}{a_j}=a_m$；

② 对于$\{a_n\}$中任意一项a_n（$n\geqslant 3$），在$\{a_n\}$中都存在两项a_k，a_l（$k>l$），使得$a_n=\frac{{a_k}^2}{a_l}$．

（Ⅰ）若$a_n=n$（$n=1$，2，…），判断数列$\{a_n\}$是否满足性质①，说明理由；
（Ⅱ）若$a_n=2^{n-1}$（$n=1$，2，…），判断数列$\{a_n\}$是否同时满足性质①和性质②，说明理由；
（Ⅲ）若$\{a_n\}$是递增数列，且同时满足性质①和性质②，证明：$\{a_n\}$为等比数列．

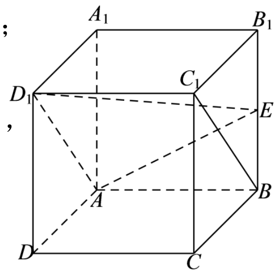
北京 2020 年高考数学真题答案

一、选择题

01-05．DBCDA　　06-10．DBBCA

二、填空题

11．{x|x>0}；　12．（3，0）；$\sqrt{3}$；　13．$\sqrt{5}$；－1；　14．$\dfrac{\pi}{2}$；　15．①②③；



三、解答题

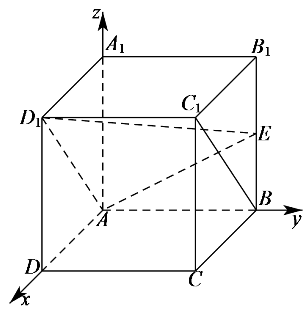
16．（Ⅰ）如下图所示：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB//A_1B_1$ 且 $AB=A_1B_1$，

$A_1B_1//C_1D_1$ 且 $A_1B_1=C_1D_1$，$\therefore AB//C_1D_1$ 且 $AB=C_1D_1$，

所以，四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，则 $BC_1//AD_1$，

$\because BC_1\not\subset$ 平面 AD_1E，$AD_1\subset$ 平面 AD_1E，$\therefore BC_1//$ 平面 AD_1E；

（Ⅱ）以点 A 为坐标原点，AD、AB、AA_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则 $A\left(0,0,0\right)$、$A_1\left(0,0,2\right)$、$D_1\left(2,0,2\right)$、$E\left(0,2,1\right)$，$\overrightarrow{AD_1}=\left(2,0,2\right)$，$\overrightarrow{AE}=\left(0,2,1\right)$，



设平面 AD_1E 的法向量为 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}2x+2z=0\\ 2y+z=0\end{cases}$，

令 $z=-2$，则 $x=2$，$y=1$，则 $\vec{n}=\left(2,1,-2\right)$．

$\cos<\vec{n},\overrightarrow{AA_1}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AA_1}\right|}=-\dfrac{4}{3\times2}=-\dfrac{2}{3}$．

因此，直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值为 $\dfrac{2}{3}$．

17．选择条件①

（Ⅰ）$\because c=7,\cos A=-\dfrac{1}{7},\ a+b=11$

$\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\ \therefore a^2=(11-a)^2+7^2-2(11-a)\cdot7\cdot(-\dfrac{1}{7})\ \therefore a=8$

（Ⅱ）$\because \cos A=-\dfrac{1}{7}$，$A\in(0,\pi)\ \therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

由正弦定理得：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}\ \therefore \dfrac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}=\dfrac{7}{\sin C}\ \therefore \sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$S=\dfrac{1}{2}ba\sin C=\dfrac{1}{2}(11-8)\times8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

选择条件②

（Ⅰ）$\because \cos A=\dfrac{1}{8},\cos B=\dfrac{9}{16}$，$A,B\in(0,\pi)\ \therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8},\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$，

由正弦定理得：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\ \therefore \dfrac{a}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\dfrac{11-a}{\frac{5\sqrt{7}}{16}}\ \therefore a=6$

（Ⅱ）$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}\times\dfrac{9}{16}+\dfrac{5\sqrt{7}}{16}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　$S=\dfrac{1}{2}ba\sin C=\dfrac{1}{2}(11-6)\times6\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

18.（Ⅰ）该校男生支持方案一的概率为$\dfrac{200}{200+400}=\dfrac{1}{3}$，该校女生支持方案一的概率为$\dfrac{300}{300+100}=\dfrac{3}{4}$；

（Ⅱ）3 人中恰有 2 人支持方案一分两种情况，（1）仅有两个男生支持方案一，（2）仅有一个男生支持方案一，一个女生支持方案一，

所以 3 人中恰有 2 人支持方案一概率为：$(\dfrac{1}{3})^2(1-\dfrac{3}{4})+C_2^1(\dfrac{1}{3})(1-\dfrac{1}{3})\dfrac{3}{4}=\dfrac{13}{36}$；

（Ⅲ）$p_1<p_0$

19.（Ⅰ）因为$f(x)=12-x^2$，所以$f'(x)=-2x$，设切点为$(x_0,12-x_0)$，则$-2x_0=-2$，即$x_0=1$，所以切点为$(1,11)$，由点斜式可得切线方程为：$y-11=-2(x-1)$，即$2x+y-13=0$.

（Ⅱ）显然$t\neq 0$，因为$y=f(x)$在点$(t,12-t^2)$处的切线方程为：$y-(12-t^2)=-2t(x-t)$，

令$x=0$，得$y=t^2+12$，令$y=0$，得$x=\dfrac{t^2+12}{2t}$，所以$S(t)=\dfrac{1}{2}\times(t^2+12)\cdot\dfrac{t^2+12}{2|t|}$，

不妨设$t>0$（$t<0$时，结果一样），则$S(t)=\dfrac{t^4+24t^2+144}{4t}=\dfrac{1}{4}(t^3+24t+\dfrac{144}{t})$，

所以$S'(t)=\dfrac{1}{4}(3t^2+24-\dfrac{144}{t^2})=\dfrac{3(t^4+8t^2-48)}{4t^2}=\dfrac{3(t^2-4)(t^2+12)}{4t^2}=\dfrac{3(t-2)(t+2)(t^2+12)}{4t^2}$，

由$S'(t)>0$，得$t>2$，由$S'(t)<0$，得$0<t<2$，所以$S(t)$在$(0,2)$上递减，在$(2,+\infty)$上递增，

所以$t=2$时，$S(t)$取得极小值，也是最小值为$S(2)=\dfrac{16\times16}{8}=32$.

20.（Ⅰ）设椭圆方程为：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由题意可得：$\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\\ a=2b\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a^2=8\\ b^2=2\end{cases}$，

故椭圆方程为：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

（Ⅱ）设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线MN的方程为：$y=k(x+4)$，与椭圆方程$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$

联立可得：$x^2+4k^2(x+4)^2=8$，即：$(4k^2+1)x^2+32k^2x+(64k^2-8)=0$，

则：$x_1+x_2=\dfrac{-32k^2}{4k^2+1},x_1x_2=\dfrac{64k^2-8}{4k^2+1}$.直线 MA 的方程为：$y+1=\dfrac{y_1+1}{x_1+2}(x+2)$，

令$x=-4$可得：$y_P=-2\times\dfrac{y_1+1}{x_1+2}-1=-2\times\dfrac{k(x_1+4)+1}{x_1+2}-\dfrac{x_1+2}{x_1+2}=\dfrac{-(2k+1)(x_1+4)}{x_1+2}$，

同理可得：$y_Q=\dfrac{-(2k+1)(x_2+4)}{x_2+2}$.很明显$y_Py_Q<0$，且：$\dfrac{|PB|}{|PQ|}=\left|\dfrac{y_P}{y_Q}\right|$，注意到：

$y_P+y_Q=-(2k+1)\left(\dfrac{x_1+4}{x_1+2}+\dfrac{x_2+4}{x_2+2}\right)=-(2k+1)\times\dfrac{(x_1+4)(x_2+2)+(x_2+4)(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$，

而：$(x_1+4)(x_2+2)+(x_2+4)(x_1+2)=2[x_1x_2+3(x_1+x_2)+8]=2\left[\dfrac{64k^2-8}{4k^2+1}+3\times\left(\dfrac{-32k^2}{4k^2+1}\right)+8\right]$

$=2\times\dfrac{(64k^2-8)+3\times(-32k^2)+8(4k^2+1)}{4k^2+1}=0$，故$y_P+y_Q=0,y_P=-y_Q$.从而$\dfrac{|PB|}{|PQ|}=\left|\dfrac{y_P}{y_Q}\right|=1$.

21.（Ⅰ）Q $a_2=2,a_3=3,\dfrac{a_3^{\ 2}}{a_2}=\dfrac{9}{2}\notin Z\ \therefore\ \{a_n\}$ 不具有性质①；

（Ⅱ）Q $\forall i,j\in N^*,i>j,\dfrac{a_i^{\ 2}}{a_j}=2^{(2i-j)-1},2i-j\in N^*\ \therefore\dfrac{a_i^{\ 2}}{a_j}=a_{2i-j}\ \therefore\{a_n\}$ 具有性质①；

Q $\forall n\in N^*,n\ge 3,\exists k=n-1,l=n-2,\dfrac{a_k^{\ 2}}{a_l}=2^{(2k-l)-1}=2^{n-1}=a_n,\therefore\ \{a_n\}$ 具有性质②；

（Ⅲ）【解法一】首先，证明数列中的项数同号，不妨设恒为正数：

显然 $a_n\ne 0\left(n\notin N^*\right)$，假设数列中存在负项，设 $N_0=\max\{n\,|\,a_n<0\}$，

第一种情况：若 $N_0=1$，即 $a_0<0<a_1<a_2<a_3<\cdots$，

由①可知：存在 m_1，满足 $a_{m_1}=\dfrac{a_2^2}{a_1}<0$，存在 m_2，满足 $a_{m_2}=\dfrac{a_3^2}{a_1}<0$，

由 $N_0=1$ 可知 $\dfrac{a_2^2}{a_1}=\dfrac{a_3^2}{a_1}$，从而 $a_2=a_3$，与数列的单调性矛盾，假设不成立.

第二种情况：若 $N_0\ge 2$，由①知存在实数 m，满足 $a_m=\dfrac{a_{N_0}^2}{a_1}<0$，由 N_0 的定义可知：$m\le N_0$，

另一方面，$a_m=\dfrac{a_{N_0}^2}{a_1}>\dfrac{a_{N_0}^2}{a_{N_0}}=a_{N_0}$，由数列的单调性可知：$m>N_0$，

这与 N_0 的定义矛盾，假设不成立.同理可证得数列中的项数恒为负数.

综上可得，数列中的项数同号.其次，证明 $a_3=\dfrac{a_2^2}{a_1}$：

利用性质②：取 $n=3$，此时 $a_3=\dfrac{a_k^2}{a_l}\left(k>l\right)$，由数列的单调性可知 $a_k>a_l>0$，

而 $a_3=a_k\cdot\dfrac{a_k}{a_l}>a_k$，故 $k<3$，此时必有 $k=2,l=1$，即 $a_3=\dfrac{a_2^2}{a_1}$，

最后，用数学归纳法证明数列为等比数列：

假设数列 $\{a_n\}$ 的前 $k\left(k\ge 3\right)$ 项成等比数列，不妨设 $a_s=a_1q^{s-1}\left(1\le s\le k\right)$，

其中 $a_1>0,q>1$，（$a_1<0,0<q<1$ 的情况类似）

由①可得：存在整数 m，满足 $a_m=\dfrac{a_k^2}{a_{k-1}}=a_1q^k>a_k$，且 $a_m=a_1q^k\ge a_{k+1}$　　（*）

由②得：存在 $s>t$，满足：$a_{k+1}=\dfrac{a_s^2}{a_t}=a_s\cdot\dfrac{a_s}{a_t}>a_s$，由数列的单调性可知：$t<s\le k+1$，

由 $a_s=a_1q^{s-1}\left(1\le s\le k\right)$ 可得：$a_{k+1}=\dfrac{a_s^2}{a_t}=a_1q^{2s-t-1}>a_k=a_1q^{k-1}$　　（**）

由（**）和（*）式可得：$a_1q^k\ge a_1q^{2s-t-1}>a_1q^{k-1}$，结合数列的单调性有：$k\ge 2s-t-1>k-1$，

注意到 s,t,k 均为整数，故 $k=2s-t-1$，代入（**）式，从而 $a_{k+1}=a_1q^k$.

总上可得，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为：$a_n=a_1q^{n-1}$.即数列 $\{a_n\}$ 为等比数列.

【解法二】假设数列中的项数均为正数：

首先利用性质②：取 $n=3$，此时 $a_3=\frac{a_k^2}{a_l}\left(k>l\right)$，由数列的单调性可知 $a_k>a_l>0$，

而 $a_3=a_k\cdot\frac{a_k}{a_l}>a_k$，故 $k<3$，此时必有 $k=2,l=1$，即 $a_3=\frac{a_2^2}{a_1}$，

即 a_1,a_2,a_3 成等比数列，不妨设 $a_2=a_1q,a_3=a_1q^2\left(q>1\right)$，

然后利用性质①：取 $i=3,j=2$，则 $a_m=\frac{a_3^2}{a_2}=\frac{a_1^2q^4}{a_1q}=a_1q^3$，

即数列中必然存在一项的值为 a_1q^3，下面我们来证明 $a_4=a_1q^3$，

否则，由数列的单调性可知 $a_4<a_1q^3$，

在性质②中，取 $n=4$，则 $a_4=\frac{a_k^2}{a_l}=a_k\frac{a_k}{a_l}>a_k$，从而 $k<4$，

与前面类似的可知则存在 $\left\{k,l\right\}\subseteq\left\{1,2,3\right\}\left(k>l\right)$，满足 $a_4=\frac{a_k^2}{a_l}$，

若 $k=3,l=2$，则：$a_4=\frac{a_k^2}{a_l}=a_1q^3$，与假设矛盾；

若 $k=3,l=1$，则：$a_4=\frac{a_k^2}{a_l}=a_1q^4>a_1q^3$，与假设矛盾；

若 $k=2,l=1$，则：$a_4=\frac{a_k^2}{a_l}=a_1q^2=a_3$，与数列的单调性矛盾；

即不存在满足题意的正整数 k,l，可见 $a_4<a_1q^3$ 不成立，从而 $a_4=a_1q^3$，

同理可得：$a_5=a_1q^4,a_6=a_1q^5,\cdots$，从而数列 $\left\{a_n\right\}$ 为等比数列，

同理，当数列中的项数均为负数时亦可证得数列为等比数列.

由推理过程易知数列中的项要么恒正要么恒负，不会同时出现正数和负数.

从而题中的结论得证，数列 $\left\{a_n\right\}$ 为等比数列.